Что такое математическое доказательство? Часть 2

Валентин Михайлович Зюзьков
2019 (ММФ ТГУ)

Аксиоматический метод (1)

Евклид (3 век до н.э.)

Статуя в Оксфордском университетском Музее естественной истории.

Аксиоматический метод (2)

Современные особенности применения аксиоматического метода

В «Началах» Евклида аксиомы – это очевидные истины, принимаемые без доказательства. В XIX веке это понятие сильно изменилось, потому что аксиомы перестали быть очевидными, они по-прежнему принимаются без доказательства, но **могут быть в принципе совершенно произвольными утверждениями**. За этим небольшим, на первый взгляд, изменением стоит достаточно радикальная смена философской позиции – отказ от признания одной-единственной возможной математической реальности. (**Примеры**: неевклидовы геометрии, континуум-гипотезу и аксиома выбора.)

Доказательства при аксиоматическом методе могут быть **неформальными и формальными**.

Первое понятие – традиционное, и оно было единственным до становления математической логики. Наряду с неформальным, его можно назвать и психологическим доказательством, поскольку психологии в нем не меньше, чем математики.

Аксиоматический метод (3)

Неформальное (содержательное, психологическое) доказательство – это **рассуждение, которое нас убеждает настолько в истинности некоторого высказывания, что мы можем после этого убедить других с помощью того же рассуждения.**

Математическая логика уточнила (формализовала) понятие содержательного доказательства и выработала понятие формального доказательства.

В отличие от неформального аксиоматического метода формальный аксиоматический метод отличается тем, что совершенно четко определяет записанные в виде аксиом исходные положения и дозволенные способы рассуждений.

Точно указываются допустимые логические переходы. Отметим, что все это определяется в виде синтаксических правил, поэтому формальные доказательства можно делать чисто механически, не вникая в их содержание. Проверять правильность формальных доказательств можно с помощью компьютера.

Неформальные доказательство можно записывать, используя любой естественный язык, формальные доказательства нуждаются в формальном языке.

Аксиоматический метод (4)

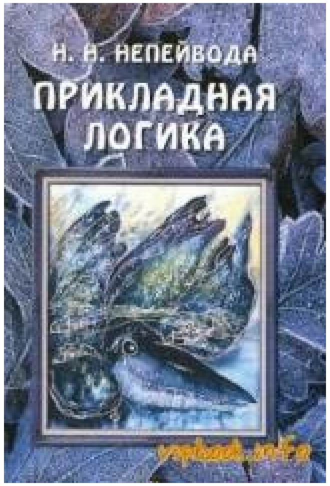
- Формальные доказательства, являются математическими объектами, следовательно, можно изучать математически формальные доказательства, что и делается в разделе математической логики, называемым **теорией доказательств**.
- Эти формализации психологических доказательств могут быть различными, но все они подчиняются некоторым общим требованиям.
- При радикальном применении формальных доказательств математика сводится к чистой логике, из нее **изгоняются такие вещи, как интуиция, наглядные геометрические представления, индуктивные рассуждения и так далее**

(пример: Бурбаки).

Форма и процесс доказательства (1)

Непейвода Н. Н. (Непейвода Николай Николаевич; род. 1949 г. – советский и российский математик, учёный в области теоретической информатики и математической логики)

Доказательство – конструкция, синтаксическая правильность которой гарантирует семантическую.



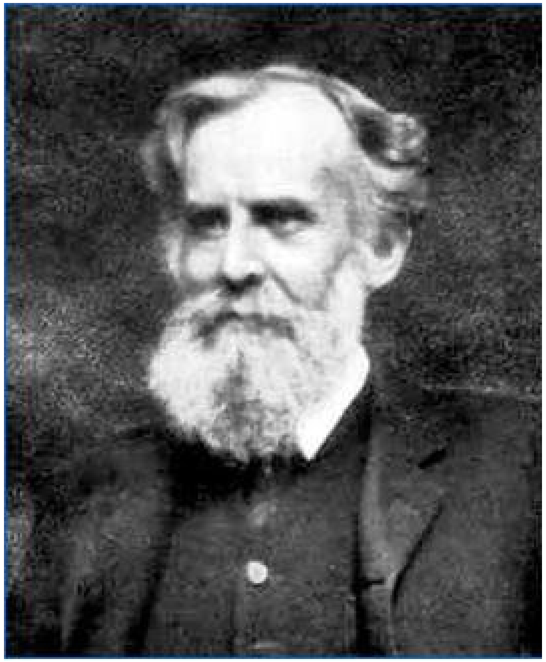
Форма и процесс доказательства (2)

Если какое-то тождество не выполняется для произвольных непустых множеств, то всегда можно построить контрпример, используя круги Эйлера.

Но оказывается с помощью диаграмм можно и доказывать.

Для этого используются частный случай кругов Эйлера – диаграммы Венна.

Этот вид диаграмм предложил и детально разработал Джон Венн (1834 – 1923) — английский логик и философ.



Форма и процесс доказательства (3)

Пусть даны множества $A_1, A_2,\ldots, A_n$, $n>1$.

Начертим диаграмму Венна, изображающую эти множества таким образом, чтобы все подмножества вида $Y_1 \cap Y_2 \cap\ldots\cap Y_n$,

где Y_k обозначает либо A_k, либо $\neg A_k$,

были не пусты.

В этом случае всевозможные комбинации $Y_1 \cap Y_2 \cap\ldots\cap Y_n$ называются составляющими системы множеств $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$.

Определение. **Составляющие системы множеств** $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ задаются следующим индуктивным определением.

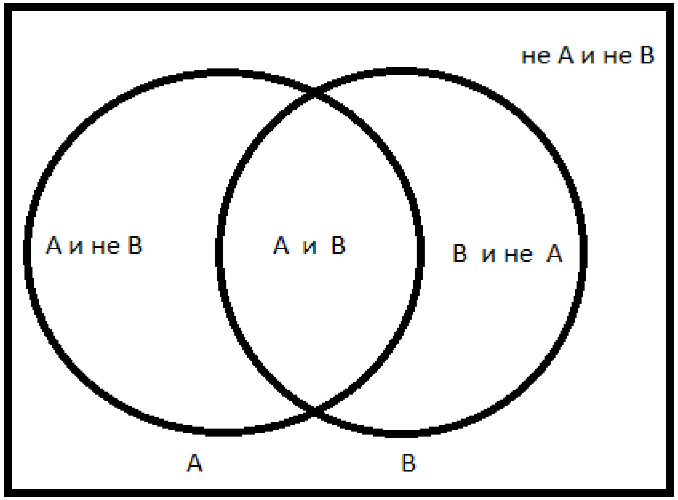
Базис. Составляющие $\{A_1\}$ суть само A_1 и его дополнение.

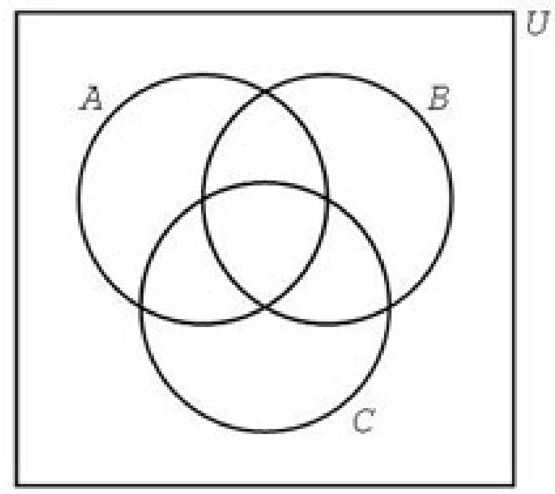
Шаг. Если S – составляющая $\{A_1, A_2,\ldots, A_{n-1}\}$, то $S \cap A_n$ и $S \cap \neg A_n$ – составляющие $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$.

Система множеств **независима**, если все ее составляющие не пусты.

Форма и процесс доказательства (4)

Теорема. (Венн) Если булево тождество выполнено для некоторой независимой системы множеств, то оно выполнено для любой системы множеств.

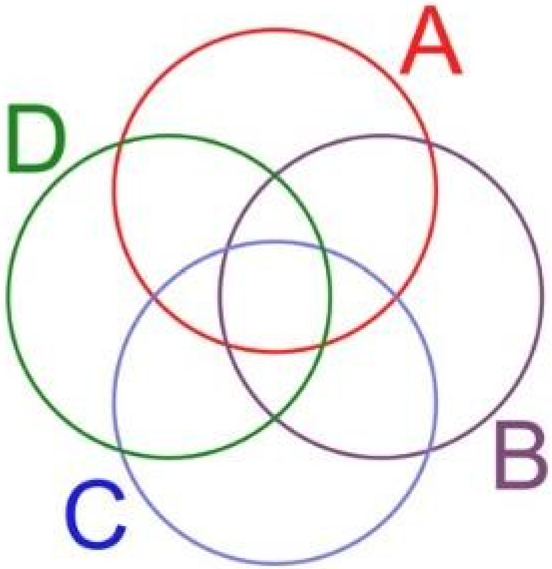




Диаграммы Венна для n = 2 и n = 3

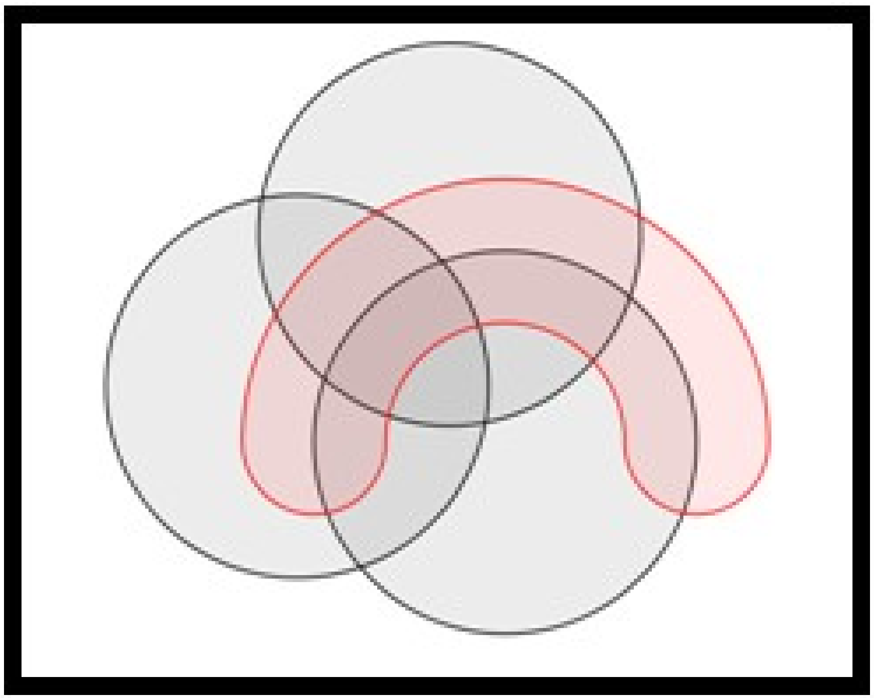
Форма и процесс доказательства (5)

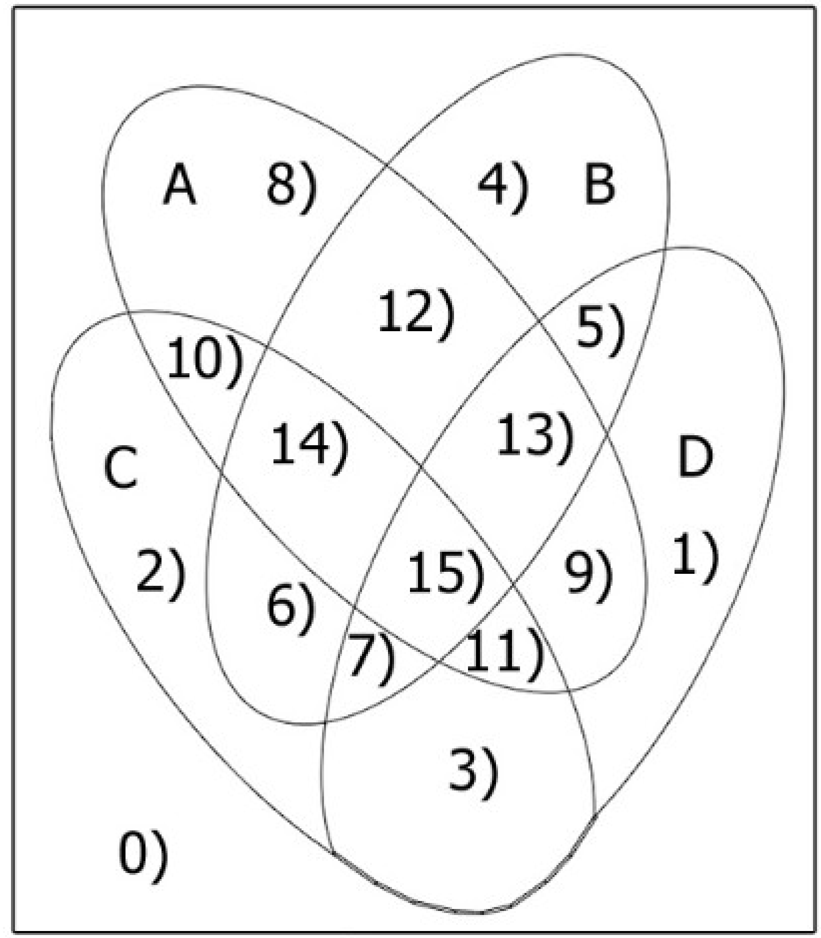
Неправильная диаграмма Венна для n = 4



Форма и процесс доказательства (6)

Правильные диаграммы Венна для n = 4





Форма и процесс доказательства (7)

- Не следует думать, что построение математических доказательств — процесс механический, это вовсе не так.
- Математик, как и любой другой ученый, **открывает идеи интуитивно. Он просто «видит» или «чувствует», что какое-то утверждение истинно, основываясь на опыте и озарении, развиваемых годами.**
- Затем математику приходится размышлять, почему этот новый «факт» верен. Вначале может появиться только набросок, схема доказательства. Со временем обнаружатся дополнительные идеи и соберутся другие части доказательства. В конце концов все пробелы будут заполнены и результатом станет настоящее строгое доказательство, подчиняющееся неумолимому диктату логики.
- В истории математики встречались области, в которых невозможно было решить, в чем заключается доказательство. Не было ни языка, ни обозначений, ни понятий, чтобы записать что-либо строго. **Теория вероятностей** пострадала от многих неверных шагов и сотни лет была полна противоречий и парадоксов, пока в 1930-х годах Колмогоров (1903–1987) не осознал, что правильным орудием для описания вероятностных идей должна служить теория меры.

Форма и процесс доказательства (8)

- Новый поворот в нашей теме создали Гари Миллер и Михаил Рабин, разработав (в 1976) **вероятностный подход к доказательству математических теорем**.
- Они изучали, как доказать, является ли некоторое большое число *p* простым, разработав алгоритм, обладающий таким свойством: каждое применение алгоритма увеличивает вероятность того, что число простое (или показывает, что это не так).
- При достаточном количестве итераций вероятность может быть сделана сколь угодно близка к 1. Но этот метод никогда не дает математически полной уверенности (если только результат не отрицательный).

Форма и процесс доказательства (9)

Философы математики по-разному смотрят на вопросы уверенности в математике.

Имре Лакатос (английский философ венгерского происхождения, 1922-1974)

В работе «**Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы. Изд 2-е.** — М.: ЛКИ, 2010. — 152 с.»

высказывает мнение, что **никакой результат в математике не может быть окончательным**, что все постоянно находится в движении.

Теорема (**формула Эйлера** для **многогранников**): Для любого выпуклого **многогранника** имеет место равенство $V - E + F = 2$, где V— число вершин, E — число ребер и F — число граней данного **многогранника**.

В своей книге он описывает класс учащихся, пытавшихся открыть формулу Эйлера — множество попыток и фальстартов, приведших в конце концов к результату. Попутно выяснилось, что **эвристики не менее важны, чем само доказательство**.

Не все математики придерживаются точки зрения Лакатоса, но она интересна и оказала широкое влияние.

Потеря логической строгости (1)

К началу XIX столетия, несмотря на свое грандиозное развитие, **математика потеряла свой эталон логической строгости**. Можно сказать, что развитие математики за более чем двухтысячный период после Евклида и Аристотеля преимущественно шло *вширь*, а не *вглубь*. Все это время дедуктивная логика, применяемая математиками, мало развивалась. Одна из причин – это интенсивное применение математики для решения практических задач, когда идеализации и абстрактные понятия возникали из опыта.

Морис Клайн в своей книге [Математика: потеря определенности] пишет:

- *«… многие математики еще в XVIII в. отмечали, что все огромное здание математической науки было лишено логического фундамента и держалось на столь шатких основаниях, что не было уверенности в “правильности” этой науки. Подобная ситуация сохранялась и в течение всей первой половины XIX в. Многие математики с головой ушли в новые области физики и добились там значительных успехов, а об основаниях математики никто попросту не задумывался».*
- *«Математический анализ, ядро которого составляет дифференциальное и интегральное исчисление – самая тонкая область всей математики, – был построен на совсем не существующих логических основаниях арифметики и алгебры и на не вполне ясных основах евклидовой геометрии».*

Потеря логической строгости (2)

Даже в конце XIX в. Карл Густав Якоб Якоби (1804-1854), в работах которого по теории эллиптических функций осталось множество неразрешенных вопросов, говаривал: «**На гауссовскую строгость у нас нет времени, господа**».

Многие математики действовали так, будто то, что им не удавалось доказать, попросту не нуждалось в доказательстве.

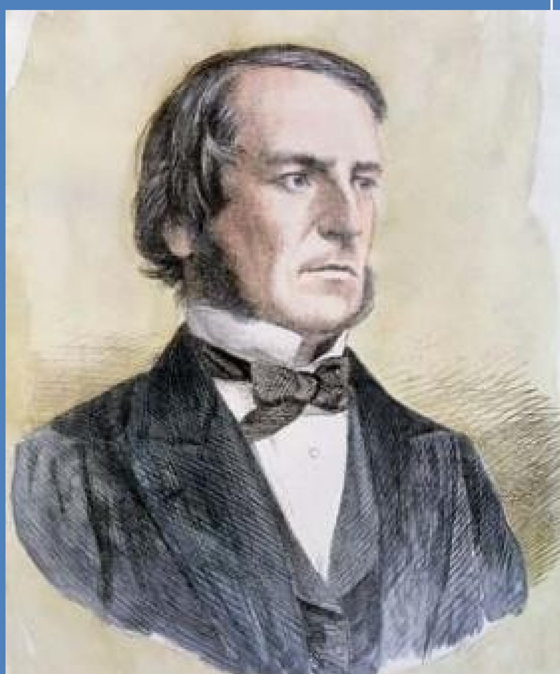
- Как было обнаружено в начале XIX, евклидова геометрия, которая служила образцом для математиков в качестве аксиоматической системы, имела серьезные изъяны. Исправление этих недостатков было закончено только перед XX веком и привело к новому пониманию аксиоматического метода и к появлению неевклидовых геометрий.
- Обоснование математического анализа оказалось невозможным без точного определения понятия вещественного числа (теория сечений Дедекинда), что в свою очередь потребовало аксиоматизации целых чисел (аксиомы Пеано).

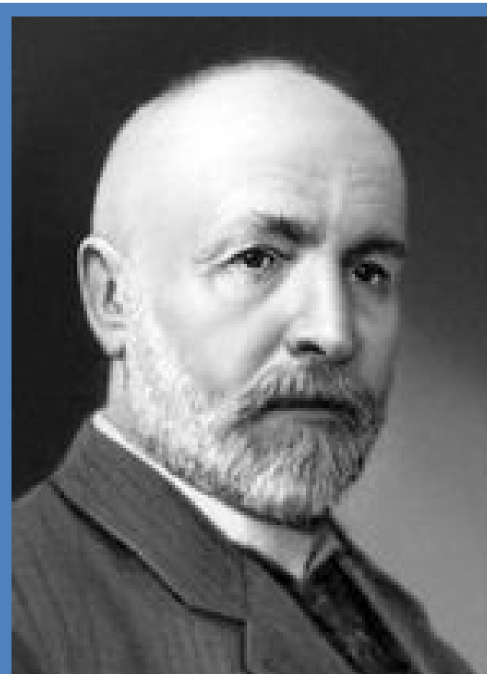
Начало математической логики

После своего зарождения большей частью логика изучалась неформально, т.е. без использования символов вместо слов.

Но в конце 19 столетия математики развили **символическую логику**, в которой вычисляемые символы заменили слова и утверждения.

Три ключевых вклада в символическую логику сделали **Джорж Буль** (1815-1864), **Георг Кантор** (1845-1918), **Готлоб Фреге** (1948-1925).

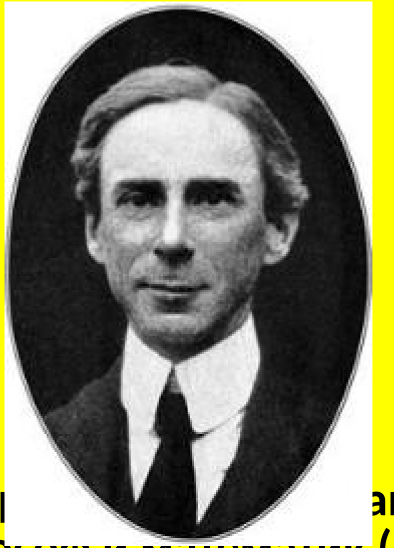




Рассел и Уайтхед (1)

В конце 19 века, следуя примеру Евклида, математики стремились свести все в математике к множеству теорем, логически выводимых из небольшого числа аксиом.
Фреге обнаружил возможность того, что сама математика может быть выведена из логики и теории множеств.
Начиная с нескольких аксиом о множествах, он показал, что числа, и, в конечном счете, вся математика следует логически из этих аксиом.

Нематематическая форма этого парадокса
 – **парадокс брадобрея.**



Бертр … анский философ и математик (1872 – 1970)
В 1901 году обнаружил парадокс в теории множеств Кантора (парадокс Рассела).

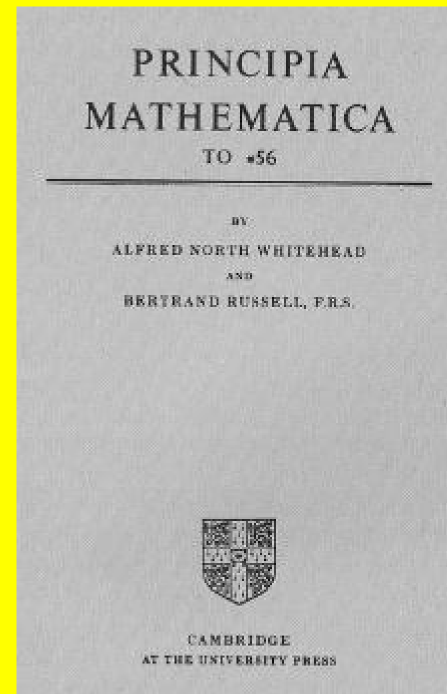
Фреге не нашел как освободиться от этого противоречия.

Рассел и Уайтхед (2)

Альф
британский математик,
логик, философ
(1861 – 1947)

Но Рассел сумел избавиться от подобных парадоксов в теории множеств.

В 1910–1913 годы Бертран Рассел и Альфред Уайтхед написали трехтомный труд «Principia Mathematica», в котором, используя идеи Фреге, обосновали математику на аксиомах теории множеств и логики.


PRINCIPIA
MATHEMATICA
TO *56

BY
ALFRED NORTH WHITEHEAD
AND
BERTRAND RUSSELL, F.R.S.

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS

Рассел и Уайтхед (4)

В наше время есть не так много людей — даже среди математиков, — которые изучают книгу Уайтхеда и Рассела.

Но она стала важным шагом в развитии математической строгости, в понимании того, каким должно быть доказательство. Сейчас создано программное обеспечение, такое как **Isabelle** (*Паульсон и Нипков создают доказыватель теорем Isabelle в 1988)*, которое на входе получает математическое доказательство (в таком виде, как современные математики используют в публикуемых статьях) и переводит его в формальное доказательство, в духе Уайтхеда и Рассела или аксиом теории множеств Цермело—Френкеля.

Рассел и Уайтхед (3)

- Бертран Рассел был студентом Альфреда Уайтхеда в Кембриджском университете. Они поставили задачу, пользуясь только логикой, вывести всю математику из минимального набора аксиом. Смысл в том, чтобы пользоваться только строгими правилами логического вывода и не употреблять никаких слов!
- В результате получился массивный трехтомный труд, оказавшийся практически нечитаемым. Это было упражнение в чистой математической логике, доведенное до последней крайности. Например, после 1200 страниц упорного труда была получена теорема 2 + 2 = 4.
- В своей автобиографии Рассел признался, что он «никогда вполне не избавился от напряжения», потребовавшегося для написания этого монументального труда.
- После того как он был закончен, Рассел прекратил занятия математикой и стал чистым философом.

Гёттингенская программа   (1)

- Давид Гильберт (1862 – 1943) – немецкий математик-универсал в 1920 г. выступил с программой обоснование математики на базе математической логики.

Гёттингенская программа (2)

В максимально упрощенном виде ее можно изложить следующим образом: математику можно представить в виде набора следствий, выводимых из некоторой системы аксиом, и доказать следующее.

1. Математика является **полной**, т.е. существует полная аксиоматическая теория математики, из которых с помощью последовательного использования правил математической логики можно вывести все положения математики.
2. Математика является **непротиворечивой**, т.е. нельзя доказать и одновременно опровергнуть какое-либо утверждение, не нарушая принятых правил рассуждения.
3. Математика является **разрешимой**, т.е., пользуясь правилами, можно выяснить относительно любого математического утверждения, доказуемо оно или опровержимо.

Гёдель (1)

«Principia Mathematica», труд Рассела и Уайтхеда, строго обосновал математику на основе логики, но сюрпризы были обнаружены в самой логике.

Курт Гёдель (1896-1978) – австрийский логик, математик и философ математики

Гёдель (2)

Курт Гедель доказал в 1931 г., что бесконечное множество математических утверждений являются истинными, но не могут быть доказаны, исходя из аксиом «Principia Mathematica».

Для любой математической теории, определенной с помощью множества аксиом, возникают два вопроса: является ли теория непротиворечивой и полной.

Непротиворечивость теории означает, что, делая логические следствия из аксиом, мы получаем только истинные утверждения.

Полнота означает, что все истинные утверждения теории можно вывести из ее аксиом.

Гёдель (3)

Теоремы Гёделя

1. **Теорема о неполноте.** В любой аксиоматической теории, содержащей арифметику, существуют неразрешимые утверждения, т.е. те, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

2. **Теорема о непротиворечивости.** Непротиворечивость любой аксиоматической теории, содержащей арифметику, не может быть доказана средствами самой теории.

Теоремы Геделя показали, что Геттингенская программа Гильберта не реализуема.

Логика, по крайней мере, в настоящем виде, недостаточна, чтобы доказать каждую математическую истину, тем более любую истину в нашем мире.

Гёдель (4)

Первая теорема Гёделя (интерпретация Раймонда Смаллиана)

- **Задача**. На острове рыцарей и лжецов каждый обитатель есть либо рыцарь, либо лжец. Рыцари могут делать только истинные утверждения, а лжецы – только ложные.
- Предположим, что на этом острове есть два клуба – Клуб 1 и Клуб 2. Каждый рыцарь есть член одного и только одного из двух клубов, а лжецам строго запрещено быть членами любого из них. Вы однажды посещаете остров и встречаете незнакомого аборигена – жителя острова, который делает утверждение, из которого вы делаете вывод, что он должен быть членом Клуба 1.
- Какое утверждение сделал абориген, чтобы из него можно было сделать такой вывод?
- **Решение**. Абориген мог произнести следующее: **«Я не член Клуба 2».** Если абориген – лжец, то он не является членом Клуба 2 и, следовательно, это утверждение было истинно. Поэтому абориген является рыцарем и, согласно своему утверждению, принадлежит Клубу 1.
- **Комментарий.** Это задача воплощает в себе существенные идеи, лежащие в основе знаменитого гёделевого предложения, которое утверждает свою собственную недоказуемость в данной математической теории. Аналогия заключается в следующем:
- **рыцари – это истинные утверждения математической теории;**
- **лжецы – ложные утверждения;**
- **рыцари из Клуба 2 – доказуемые истинные утверждения;**
- **рыцари из Клуба 1 – недоказуемые истинные утверждения.**

Когда рыцарь говорит, что он не принадлежит Клубу 2, то это означает, что **имеется некоторое истинное утверждение, говорящее о том, что оно недоказуемо.**

Бурбаки – Евклид XX века (1)

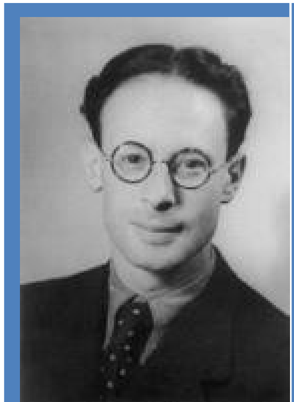
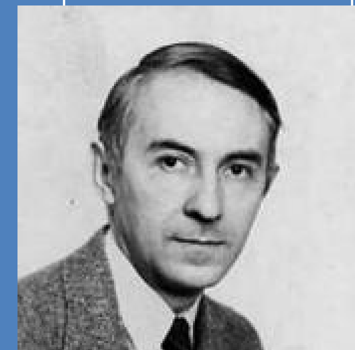
- Сто и больше лет назад не было и общепринятого языка математики. Одни и те же термины означали разные вещи для разных людей. Основания геометрии во Франции отличались от оснований геометрии в Англии, а те, в свою очередь, были не похожи на основания геометрии в Германии.
- С точки зрения математиков из мировых центров — Парижа, Берлина, Геттингена, — математиков в Америке никогда не было.
- Тогда дружеское соперничество между французскими и немецкими математиками длилось уже довольно давно. Хотя их объединяла общая любимая наука, эти две группы занимались математикой в разных стилях, придерживаясь разных приоритетов.

Бурбаки – Евклид XX века (2)

Французы приняли программу Гильберта по утверждению математической строгости очень серьезно, но их природа заставила предпринять создание своей собственной, отечественной программы. Этот проект был задуман и исполнен фигурой, замечательной в истории современной математики — Николя Бурбаки.

В середине 1930-х гг. группа французских математиков, выпускников знаменитой Ecole Normale, собралась, чтобы написать определяющие тексты по основным разделам математики. Они решили опубликовать эти книги под псевдонимом **Николя Бурбаки**. Этим именем они обязаны малоизвестному французскому генералу Шарлю Дени Сотеру Бурбаки.

Бурбаки – Евклид XX века (3)

					
Андре Вейль (1906–1998)	Жан Дельсарт (1903–1968)	Жан Дьедонне (1906–1992)	Рене де Поссель (1905–1974)	Клод Шевалле (1909–1984)	Анри Картан (1904–2008)

Бурбаки – Евклид XX века (4)

Бурбаки – Евклид XX века (5)

- Группа Бурбаки сформировалась в 1930-х гг. Первая предварительная конференция прошла в конце 1934 г., а затем утвердилось строгое правило собирать каждый год по две конференции — недельную и двухнедельную.
- Первая формальная конференция состоялась в июле 1935 г.
- Вначале казалось, что основы всей математики удастся набросать хотя бы вчерне за три года.
- А на самом деле подготовка первой завершенной главы (одной только книги по теории множеств) заняла четыре года.
- Группа Бурбаки изобретала математику заново для XX в. В частности, они предприняли попытку стандартизовать терминологию и обозначения.
- Вейль берет на себя изобретение знака ∅ для пустого множества (из норвежского алфавита).

Бурбаки – Евклид XX века (6)

- Каждый из отцов-основателей организации сам по себе был выдающимся и состоявшимся математиком.
- У каждого было широкое видение предмета и четкое понимание того, чем должны быть Бурбаки и какую миссию исполнить.
- Первоначальная цель группы — написать определяющий текст по математическому анализу, однако со временем было решено, что проверки и ясного изложения требует вся математика.
- И в итоге возник многотомный трактат «**Начала математики**» (Eléments de Mathématique).
- Хотя книги Бурбаки хорошо известны во всем мире, личности членов группы сохранялись в секрете.
- Конференции и их результаты — все было покрыто тайной.

Бурбаки – Евклид XX века (7)

- Внутреннюю жизнь группы не раскрывал никто; наоборот, даже распространялась дезинформация, чтобы вводить посторонних в заблуждение.
- Со временем к Бурбаки присоединились новые члены; например, Жан Кулон, Шарль Эресманн, Шолем Мандельброт Александр Гротендик, Жан-Пьер Серр, Самюэль Эйленберг, Арман Борель и Серж Ленг. Другие, наоборот, выходили из состава группы. Но ее основу составляли французские математики, у которых было согласованное представление о потребностях математики XX в.
- В группе Бурбаки было очень мало формальных правил; одно из них гласило, что по достижении 50 лет любой человек должен покинуть группу.

Бурбаки – Евклид XX века (8)

- В трактате, выходящем с 1939 г., развивается формальная аксиоматическая система, которая, по замыслу авторов, должна охватить главнейшие разделы математики.
- Бурбаки придавали особое значение абстрактному, логико-ориентированному подходу к математике.
- Основные принципы изложений: **единство и полная формализация математики на основе теории множеств; систематичность; догматизм и самодостаточность.**
- Было решено, что Бурбаки никогда не обобщают специальные случаи, а **всегда выводят частные случаи из самых общих**.
- Целью Бурбаки было собрать в различных применяемых в математике процессах то, что можно выделить в виде теории, логически связанной, легко излагаемой и легко используемой.

Бурбаки – Евклид XX века (9)

- Решение Бурбаки использовать аксиоматический метод всюду без исключения принесло с собой необходимость новой организации различных математических дисциплин.
- Оказалось невозможным сохранить классическое деление математики на анализ, геометрию, алгебру, теорию чисел и т.д. Его место заняла ключевая концепция «**структура**».
- Структуры определяются посредством аксиом; например, есть **алгебраические структуры**, **структуры порядка** и **топологические структуры**. Все эти три структуры присутствуют в понятии действительных чисел, и, конечно, не независимо, а связаны между собой сложным образом.
- Это позволило определить понятие изоморфизма и новую нетрадиционную классификации основных математических дисциплин.
- В трактате описываются в основном математические теории, практически полностью исчерпанные, по крайней мере в их основе. Речь идет лишь об основах, а не о деталях, о теориях, приведенных к такому состоянию, при котором они могут быть изложены чрезвычайно рациональным способом.

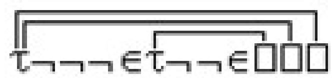
Бурбаки – Евклид XX века (10)

- Крайняя абстракция в изложении трактата
  Выражение для 1

$$
\begin{aligned}
&\tau_Z((\exists u)(\exists U)(u = (U, \{\varnothing\}, Z) \text{ и } U \subset \{\varnothing\} \times Z \\
&\text{и } (\forall x)((x \in \{\varnothing\}) \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in U)) \\
&\text{и } (\forall x)(\forall y)(\forall y')(((x, y) \in U \text{ и } (x, x') \in U) \Rightarrow (y = y')) \\
&\text{и } (\forall y)((y \in Z) \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in U)) \\
&\text{и } (\forall x)(\forall x')(\forall y)(((x, y) \in U \text{ и } (x', y) \in U) \Rightarrow (x = x')))).
\end{aligned}
$$

БУРБАКИ – ЕВКЛИД XX ВЕКА (11)

Так как символ пустого множества ∅ есть сокращение для выражения



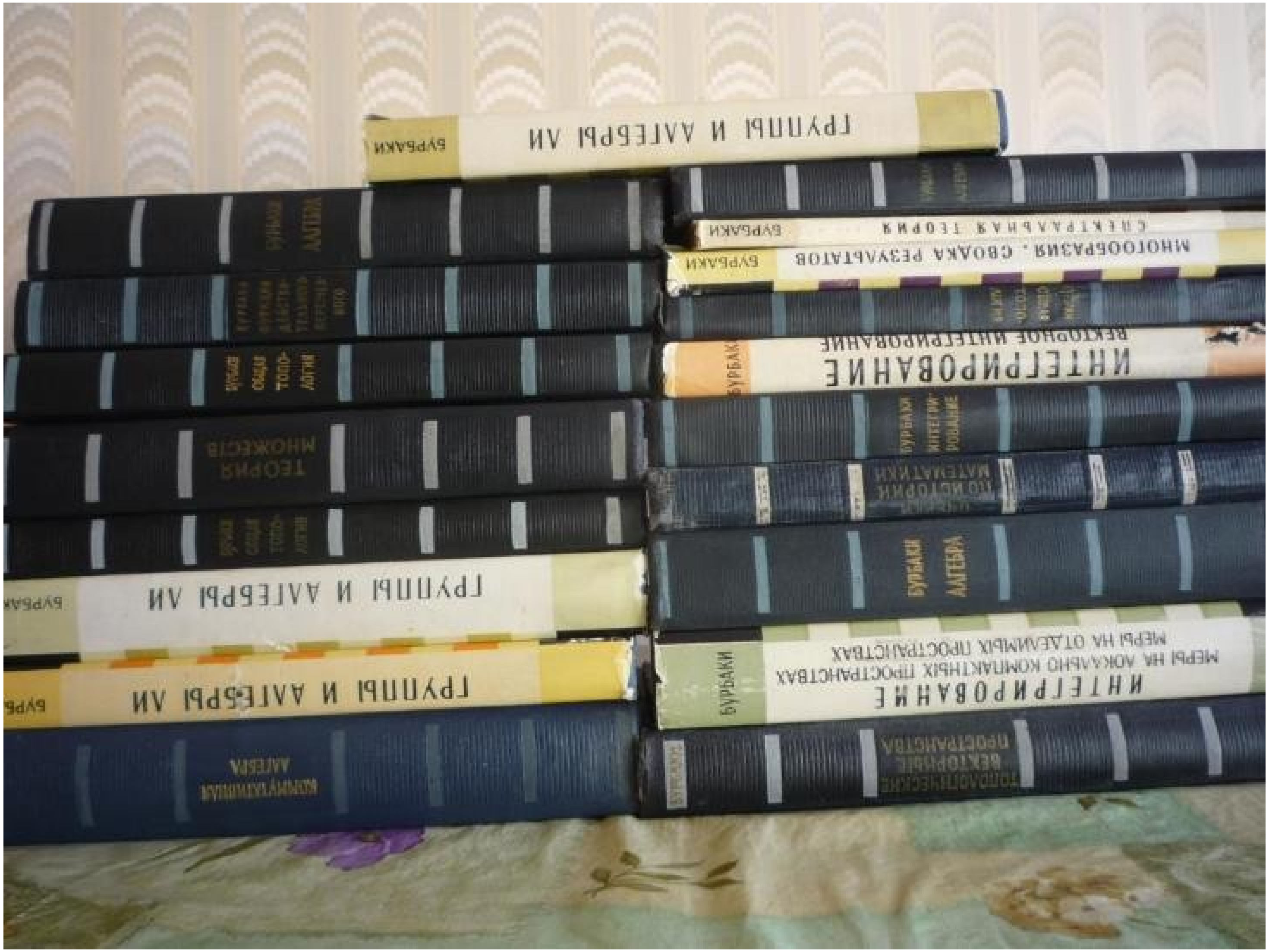
то полная запись обыкновенной единицы 1 состоит из 4 523 659 424 929 символов!

Математика 20 века восприняла влияние формалистких взглядов Н. Бурбаки: стиль практически всех научных работ по математике постепенно изменился в сторону формализации.

Бурбаки – Евклид XX века (12)

- Деятельность этого коллектива дала единый язык для таких областей математики, как алгебра, топология, топологическая алгебра, теория алгебраических чисел, функциональный анализ и др., и способствовало их существенному развитию. Это еще раз подтвердило, что математика – едина. Во Франции написано более 40 книг этого трактата. В 1959–1987 гг. были переведены на русский язык более 20 томов.
- Через 20 лет после начала работы над трактатом первые изданные книги в какой-то мере частично устарели, так как математика – это живой развивающийся организм.
- Кроме того, куда двигаться дальше? Какие еще не рассмотренные в трактате общие теории уже можно считать близкими к окончательному виду?
- На эти вопросы стало невозможно ответить. В 1968 г. Бурбаки объявил о прекращении своей деятельности. Задуманный трактат остался незаконченным.

Бурбаки – Евклид XX века (13)



Бурбаки – Евклид XX века (14)

- Математика XX в. восприняла влияние формалистких взглядов Н. Бурбаки [*Сосинский А. Б.* Умер ли Бурбаки? // Математическое просвещение, третья серия, выпуск 2, 1998.]:

«…стиль практически всех научных работ по математике в период от пятидесятых по семидесятые годы постепенно изменился в сторону формализации, стал в той или иной степени походить на формально-бурбакистскую манеру, притом, как правило, этот процесс происходил неосознанно».

- Трактат «Начала математики» – это не энциклопедия, поскольку содержит полные доказательства; скорее это полезный и удобный рабочий инструмент, которым следует пользоваться математикам, приступающим к исследованиям в новой для них области.
- Конечно, это и не учебник, ибо невозможно «*обучение математике по работам Николя Бурбаки, потому что ученики лишены способности познания той математики, которая представляет собой “нечто вроде экспериментальной физики”, и поэтому преподаватели обязаны указывать одной рукой в уже пройденное прошлое, а другой – в еще неизвестное будущее…*» [Штейнгауз].

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (1)

Сриниваса Рамануджан (1887–1920) был одним Из самых удивительных и талантливых математиков XX в. Он родился в бедной семье в небольшой индийской деревне. В детстве он сменил несколько начальных школ, выказав значительный талант во всех предметах. К тринадцати годам Рамануджан начал свои собственные независимые математические исследования.

«Синопсис элементарных результатов чистой и прикладной математики» — двухтомное руководство английского математика Карра, написанное в 1880 – 1886 гг., попало к Рамануджану в 1903 г. — ему было тогда 16 лет.

Эта книга сыграла огромную роль в формировании Рамануджана. В ней было собрано 6165 теорем и формул, почти без доказательств, с минимальными пояснениями. В основном книга посвящена алгебре, тригонометрии, анализу, аналитической геометрии.

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (2)

1. Книга Карра оказалась достаточно удачной для того,

чтобы сформировать математический мир Рамануджана.

2. Но ориентация на эту книгу имела и другие последствия. Поскольку книга не содержала доказательств, а в лучшем случае — наводящие соображения, у Рамануджана складывается своеобразный метод установления математической истины. К тому же он лишен в Индии подходящих руководств для того, чтобы проводить строгие доказательства.
3. **Его понимание сущности математического доказательства было более чем туманным; он пришел ко всем своим результатам, как ранним, так и более поздним, как верным, так и неверным, при помощи странной смеси интуитивных догадок, индуктивных соображений и логических рассуждений. . . .**
4. Математическая судьба Рамануджана фактически полностью решилась в эти годы —направление научных поисков, способ думать он уже никогда не менял.

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (3)

Рамануджан стремительно пополняет запас фактов, почерпнутый у Карра. Он при этом с удивительной скоростью переоткрывает результаты Эйлера, Гаусса, Якоби. Можно только удивляться, что реконструкции математики с такими скоростями возможны.

Постепенно коллекция наблюдений над конкретными числами уходит у Рамануджана на второй план перед миром формул.

Формулы для него — не вспомогательное средство для доказательств или вычислений, но представляют самостоятельную цель. Внутренняя красота формулы имеет для Рамануджана бесконечную ценность. Его формулы можно рассматривать как прекрасные картины.

Он самостоятельно изучал гипергеометрические ряды и эллиптические функции.

Рамануджану удалось опубликовать некоторые свои идеи об эллиптических функциях и числах Бернулли в журнале Индийского математического общества. Этим он заслужил репутацию молодого математического гения.

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (4)

Рамануджану приходилось занимать должность низкооплачиваемого клерка, чтобы заработать на жизнь. В поисках поддержки и совета в 1912–1913 гг. Рамануджан обратился с письмами к ряду выдающихся британских математиков, в том числе и к **Годфри Харди** (1877-1947).

Харди понял, что от него требуется не оценка результатов безвестного любителя или младшего коллеги, но спасение огромного дарования.

Пример формулы, посланной Харди Рамануджаном.

Общий член этой формулы:

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \ldots = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = (-1)^n(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^3$$

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (5)

Это, возможно, самая красивая формула Рамануджана, истинное произведение математического искусства.

Она неожиданно связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь. Удивительно, что ни ряд, ни цепная дробь не выражаются через известные постоянные π и e.

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+$$

$$+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (6)

В 1914 г. благодаря Харди Рамануджан прибыл в Тринити-колледж

Кембриджского университета. Харди и Рамануджан немедленно приступили к плодотворному и динамичному сотрудничеству.

Но здесь тоже обнаружились свои трудности. Рамануджану очень недоставало нормального образования.

Он не видел или не понимал важности математического доказательства. Он просто «видел» факты, проникая в них почти мистически, и оставлял другим озаботиться о том, как эти факты доказывать.

Часто Рамануджан был прав в глубоком и важном смысле, но иногда он ошибался. Он полагал, что Бог говорит с ним и посылает ему эти математические озарения.

Харди же был одним из самых признанных и влиятельных математиков того времени, для него был неприемлем этот подход Рамануджана. Иногда Харди сам мог построить доказательства, но иногда ему это не удавалось.

У Рамуджана много общих интересов с Харди. **Фантастическая интуиция Рамануджана, объединившись с рафинированной техникой Харди, дает замечательные плоды**. К Рамануджану приходит признание: в 1918 г. он становится профессором университета в Кембридже; его выбирают в Королевское общество (английскую академию наук). Никогда прежде индус не удостаивался таких почестей.

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (7)

Пример формулы, полученной Рамануджаном:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)![1103+26390n]}{(n!)^4 396^{4n}}$$

каждое слагаемое формулы даёт 8 точных десятичных цифр.

Рамануджан непостижимо «чувствовал» числа; вот одно из обнаруженных им транцедентных, но «почти целых» чисел:

$e^{\pi\sqrt{163}}$ = 262537412640768743.99999999999925…….

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (8)

К 1919 г. здоровье Рамануджана совсем расшаталось и он вернулся

в Индию. Через год он умер. **Рамануждан оставил несколько замечательных тетрадей, в которых записывал свои формулы и идеи. Но не доказательства.** До сих пор математики пытаются заполнить все пробелы в этих записях, прорабатывая детали, чтобы мы смогли понять и оценить открытые Рамануджаном поразительные связи в мире чисел.

Наверняка для Харди способ работы Рамануджана был чужд. Рамануджан был **экспериментатором в математике**: он свободно входил во вселенную математических возможностей и делал расчеты для того, чтобы найти интересные и значимые факты — и только затем строил теории, основанные на них.

Харди же работал в традиционном русле, постепенно расширяя описательную часть существующей математики. У него нет внезапных эмпирических открытий, как нет и необъяснимых скачков, основанных на интуиции. Его математика тщательно аргументирована и построена по кирпичику.

Столетие спустя почти все работы по математике делаются так же.

Сриниваса Рамануджан и новый взгляд на доказательство (9)

Фильм о Рамануджане: **Человек, который познал бесконечность**

https://www.youtube.com/watch?v=lJl_epvi9kE&index=1&list=PLt3PrGAjhTdxaCkuiuxbEroGaEeN9S-G7

Правильный взгляд на математику приводит не только к истине, но и к совершенной красоте.

Бертран Рассел

Экспериментальная математика

Существует ли математический мир независимо от нас или создается нами?

- Математики занимаются изобретениями или делают открытия?
- Если математический мир реально существует, то какие органы чувств использует математик, чтобы устанавливать математические факты?
- Конвенционализм: Математические истины являются «истинами по соглашению», поскольку все они представляют собой более или менее отдаленные следствия принятых соглашений. Нам не нужен опыт, чтобы оправдать математическое утверждение.
- Если мы опираемся на точные данные, то математика не может привести к ошибочному результату. Почему же математика столь надежна и эффективна?
- Реализм: Истины математики не являются только «истинами по соглашению». Тот факт, что математика приводит к правильным результатам, по-видимому, показывает, что она способна точно отобразить положение дел во «внешнем мире».
- **Но как мы тогда получаем математическое знание?**

Математики открывают или изобретают? (1)

- **Комплексные числа**

Комплексные числа были введены, чтобы решать кубические уравнения.

В течение тех четырех веков, когда были известны комплексные числа, их магические свойства проявлялись постепенно. Сначала они ощущались лишь внутри самой математики, создавая единство и глубину математического понимания, недостижимую при использовании одних лишь вещественных чисел.

Не было никаких оснований ожидать, что физический мир должен иметь к ним какое-то отношение. И в течение приблизительно 350 лет с тех пор, как эти числа были введены работами Кардано и Бомбелли, магия комплексных чисел проявлялась лишь в их чисто математической роли.

Для всех тех, кто высказывал недоверие в отношении комплексных чисел, несомненно, оказалось большим сюрпризом, что, согласно физике последних трех четвертей XX века, законы, управляющие миром в его наиболее малых масштабах, определенно описываются системой комплексных чисел.

Математики открывают или изобретают? (2)

Комплексные числа (продолжение)

Хотя мы добавили квадратный корень лишь для одной величины (а именно –1), оказывается, что любое число получающейся при этом системы теперь автоматически имеет квадратный корень!

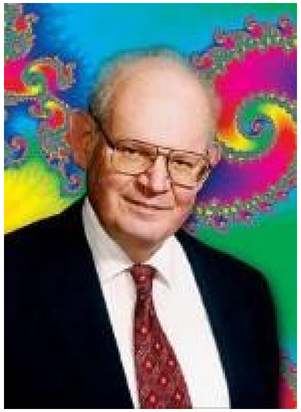
Но это лишь самое начало. Мы можем задать вопрос относительно кубического корня, корня пятой степени, корня 999-й степени и даже корня *i*-й степени. Мы найдем, что какое бы комплексное число мы ни взяли и корень какой комплексной степени (за исключением 0) из него ни извлекли, мы удивительным образом всегда получим в ответе комплексное число.

Основная теорема алгебры говорит, что любое полиномиальное уравнение имеет решения в виде комплексных чисел. Хотя число i было введено, просто для того, чтобы получить решение одного частного уравнения $1 + x^2 = 0$.

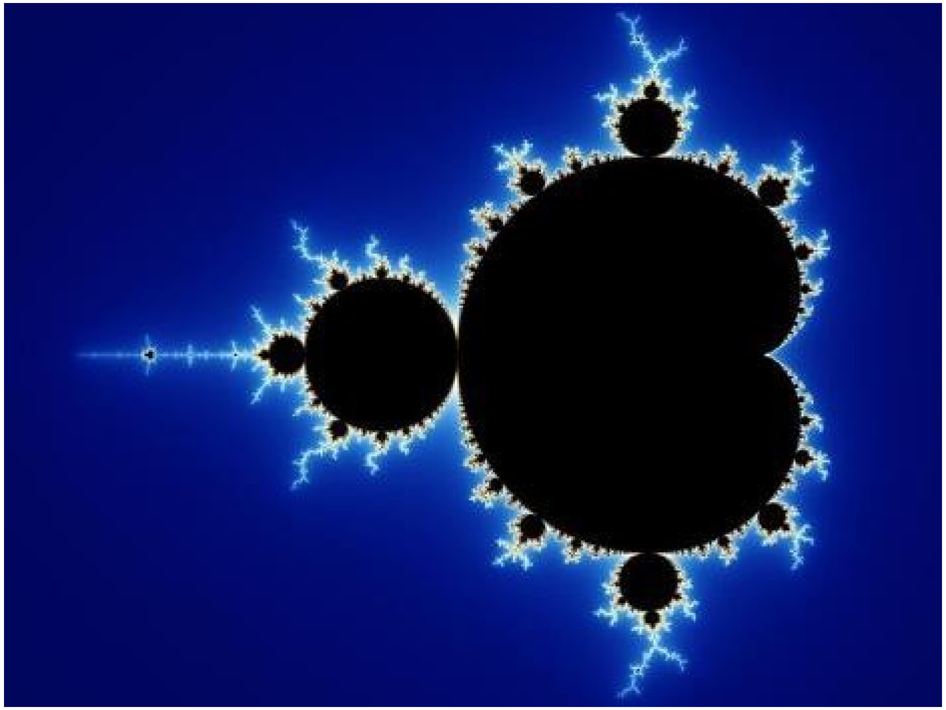
Все остальное мы получили бесплатно!

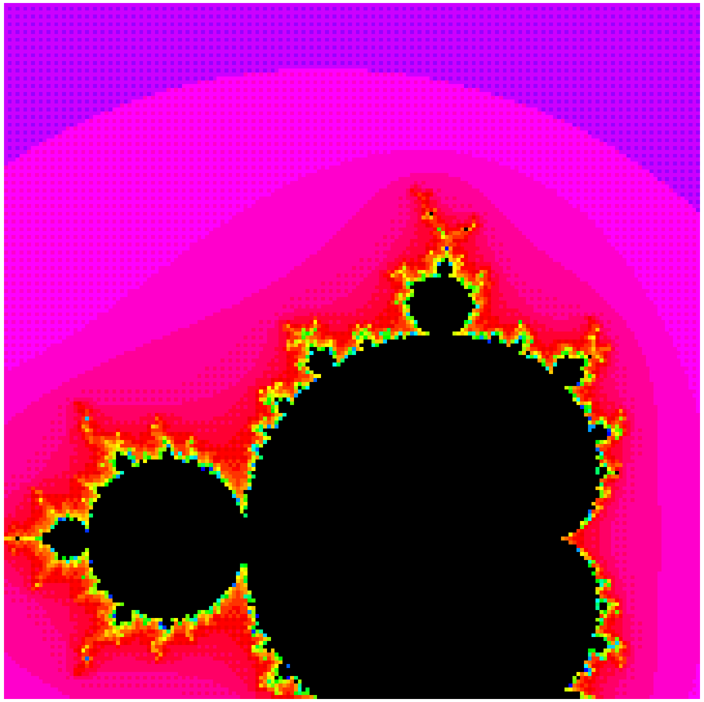
Математики открывают или изобретают? (3)

Множество Мандельбота



Вы видите знаменитый математический объект, называемый множеством Мандельброта. Множество Мандельброта чрезвычайно сложно и замысловато устроено, причем «устроено» не человеком. Самое замечательное здесь то, что структура множества целиком и полностью определяется математическим правилом исключительной простоты.





Математики открывают или изобретают? (4)

Множество Мандельбота (продолжение)

Когда Бенуа Мандельброт обнаружил невероятную сложность тонкой структуры полученного множества, никто – и сам Бенуа Мандельброт в том числе – не имел реального представления о том, какие богатства это множество в себе содержит.

Множество Мандельброта совершенно определенно не является изобретением человеческого разума.

Оно просто объективно существует в самой математике. Если вообще имеет смысл говорить о существовании множества Мандельброта, то существует оно отнюдь не в наших с вами разумах, ибо ни один человек не в состоянии в полной мере постичь бесконечное разнообразие и безграничную сложность этого математического объекта.

Равным образом не может оно существовать и в многочисленных компьютерных распечатках, которые пока только начинают охватывать некую малую толику его невообразимо сложно детализированной структуры, – на этих распечатках мы видим не само множество Мандельброта и даже не приближение к нему, но лишь бледную тень очень грубого приближения.

И все же множество Мандельброта существует и существует вполне устойчиво: кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая – и чем «глубже» мы считаем, тем более точной и детальной будет картинка.

Математики открывают или изобретают? (5)

Множество Мандельбота (продолжение)

Разумеется, математические формы существуют не совсем так, как существуют обычные физические объекты – скажем, столы и стулья.

Они не имеют пространственного местоположения, не существуют они и во времени. Объективные математические понятия следует представлять как вневременные объекты; не нужно думать, будто их существование начинается в тот момент, как только они в том или ином виде возникают в человеческом воображении.

Замысловатые завитки множества Мандельброта, не были вызваны из небытия в то мгновение, когда кто-то увидел их на экране компьютера или на распечатке. Не возникли они и тогда, когда впервые была выдвинута человеком лежащая в основе множества Мандельброта общая идея.

Потому что никто из математиков в начале своих экспериментов не имели сколько-нибудь реального представления о тех изящных тонких узорах, что составляют множество Мандельброта.

Эти узоры «существовали» и прежде, они существуют с незапамятных времен и будут существовать всегда – в потенциально вневременном смысле, предполагающем, что в какое бы время, в каком бы месте, какое бы обладающее сознанием существо ни решило исследовать их структуру, оно всякий раз увидит в точности то же самое, что видим сегодня мы с вами.

Математики открывают или изобретают? (6)

Природа математики

- *Большинство математиков (и физиков):*

Математический платонизм – математика есть высшее проявление объективной реальности, данностью существующей вне времени, места и, конечно же, вне нас самих.

Афоризм:

Математика – это единственная область знаний, где царит консенсус. Причем консенсус этот внутренний, добровольный, а не навязанный властью или авторитетными именами.

- *Антропологи, психологи, лингвисты:*

Математика – **плод человеческого воображения, исключительно продукт человеческого интеллекта, искусственная умственная конструкция, хотя и достаточно прочная, но такая же невечная, как все конструкции, созданные нами, людьми.**

- *Профессионалы, интересующие феноменом математической строгости, но не имеющие непосредственного отношения к математике,*

занимают **промежуточную позицию**.

Математики открывают или изобретают? (7)

Иммануил Кант (1724–1804):

Кант говорил, что **рассудок не черпает свои законы из природы, а приписывает их ей**.

То есть **законы природы не содержатся в ней, а мы изо всех сил стараемся их в природе найти.**

Просто у нас такая голова, которая умеет складывать внешний мир в формочки.

Может быть, математика – это просто язык, которым умеет оперировать наш мозг.

Галилей, правда, говорил, что Создатель написал книгу природы языком математики.

Экспериментальная природа математики (1)

Платонический подход отчасти превращает нас в физиков.

Для физика нет большого смысла в том, чтобы изучать предмет, просто создавая понятия путем чистого измышления. На самом-то деле предполагается, что физик описывает окружающий мир. Физик вроде Стивена Хокинга, с творческой жилкой и воображением, способен выдумывать идеи вроде «черных дыр», «супергравитации» и «червоточин», но только с целью объяснить устройство вселенной. Все же это не сочинение сказок.

Философское следствие. Физики не считают делом чести доказывать то, что утверждают в своих исследовательских статьях. Они часто прибегают к другим способам рассуждения — от описания и аналогии до эксперимента и вычислений.

Если мы, математики — платоники, описывающие мир, который «уже есть», то почему нам нельзя пользоваться теми же методами, которые применяют физики? **Почему мы обречены доказывать**?

Экспериментальная природа математики (2)

На самом деле экспериментированием математики занимаются.

Как оно вписывается в строгую аксиоматическую методологию, которую мы описали?

До сих пор мы обсуждали, как в математике записывают результаты. Мы используем аксиоматический метод и доказательство с целью хранить наши идеи так, чтобы предмет изучения оставался надежным, воспроизводимым и безупречным.

Математические идеи хорошо путешествуют и переносят проверку временем именно потому, что записываются в виде пошаговых доказательств.

Но открытие математических фактов происходит совсем иначе. **Практикующие математики делают открытия методом проб и ошибок**: они работают над примерами, разговаривают с коллегами, выдвигают гипотезы, читают лекции, пытаются сформулировать результаты, меняют доказательства, выводят частичные результаты и ошибаются.

Экспериментальная природа математики (3)

Практически невозможно сразу же записать строгую формулировку теоремы.

Между прочим, это одно из самых поразительных замечаний о профессиональных математиках. Целую жизнь можно провести, совершая ошибки и пытаясь на них учиться.

Вряд ли есть какая-нибудь другая профессия, где можно позволить себе такое.

Математик может потратить два-три года или даже больше, экспериментируя, пробуя, терпя неудачи и начиная все заново.

Но как только математик добирается до сути, а затем приходит наконец к строгой формулировке и доказательству новой идеи, тут-то и приходит черед аксиоматического метода. Это способ, гарантирующий постоянство наших идей, их способность путешествовать по миру и быть понятными следующим поколениям.

Но это не есть путь, на котором происходит открытие математики.

Что такое экспериментальная математика?

- Экспериментальная математика – **это тип математического исследования, в котором вычисление используется для исследования математических структур и определения их фундаментальных свойств и закономерностей.**
- Как и в экспериментальной науке, экспериментальная математика может быть использована для составления математических предсказаний, которые затем могут быть подтверждены или опровергнуты на основе дополнительных вычислительных экспериментов. **Эти исследования должны завершаться доказательством.**

- **Но математика больше чем доказательство.**

Дьёрдь Пойа

- **Дьёрдь По́йа (1987-1985) — венгерский, швейцарский и американский математик.**

Книги :

1. Как решать задачу. Изд. 4-е. — М.: Либроком, 2010. — 208 с.

2. Математика и правдоподобные рассуждения. Изд. 3-е. — М.: Либроком, 2010. — 464 с.

3. Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. Изд. 3-е. — М.: КомКнига, 2010. — 448 с.

- (1948) Неравенства. — М. (совместно с Г. Харди и Дж. Литлвудом)
- (1962) Изопериметрические неравенства в математической физике. — М. (соавтор — Г. Сегё)
- (1978) Задачи и теоремы из анализа. 3-е изд. — М. (соавтор Г. Сегё)

Высказывания Д.Пойа (1)

- *«Будущий математик, как и всякий человек, учится при помощи практики и подражания. Ему следует искать подходящий пример для подражания. Он должен следить за работой хорошего учителя, соревноваться со способными друзьями.*
- *Ему не следует ограничивать себя лишь стабильными учебниками; он должен интересоваться книгами хороших авторов и найти себе такого, которому сможет в соответствии со своими природными наклонностями подражать.*
- *Его должно радовать всё, что кажется ему просто, или поучительно, или красиво. Всё это он должен искать.*
- *Ему следует решать задачи, выбирая те, которые соответствуют его интересам, размышлять над их решением и изобретать новые задачи.*
- *Таким путём и всеми другими путями он должен стараться сделать своё первое важное открытие — ему следует узнать для себя, что ему нравится и что не нравится, раскрыть свои вкусы, свои личные интересы»*

Высказывания Д.Пойа (2)

- *Обучение искусству решать задачи есть воспитание воли.*
- *Решая не слишком лёгкую для себя задачу, ученик учится быть настойчивым, когда нет успеха, учится ценить скромные достижения, терпеливо искать идею решения и сосредоточиваться на ней всем своим «я», когда эта идея возникает.*
- *Я обращаюсь ко всем, кто обучается математике, элементарной или высшей, и заинтересован во владении ею, и говорю: "**Конечно, будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться**".*

Роль гипотез (1)

- Математик, который проработал в определенной области несколько лет, получает **очень сильное ощущение того, насколько идеи согласуются друг с другом, какие концепции важны, какие вопросы служат направляющими принципами в данной области.**
- Если такой математик — признанный лидер или провидец в своей области, мнения которого имеют определенный вес, если такой человек считается одним из создателей в этой области, то у него есть прерогатива высказать гипотезу (которые другие математики воспримут очень серьезно).
- **В математике принято, что гипотезы выдвигают персоны с определенным весом.**

Роль гипотез (2)

- **Последняя теорема Пьер Ферма (1637) – доказана Эндрю Уайлсом (1994).**
- **Гипотеза Гаусса о распределении простых чисел $\pi(n) \approx n/\ln n$ (1792). Доказана Адамаром и де ла Валле Пуссеном в 1896. Элементарное доказательство получено Пал Эрдёшем и Атле Сельбергом (1950).**
- **Гипотеза Римана (1859) о расположения нулей дзета-функции. Риман доказать не смог и заявил, что не будет заниматься этими вопросами, так как они далеки от его основной цели – доказать теорему о распределении простых числах**
- **Гипотеза Пуанкаре (1904): трехмерная сфера в 4-х мерном пространстве односвязна – доказана Г. Перельманом (2004)**
- **Теорема Брауэра о неподвижной точке (1909). Теорема Клини о неподвижной точке для вычислимых операторов** (1938). **Метод Ньютона** (алгоритм Ньютона, также известный как метод касательных —итерационный численный метод нахождения корня (нуля) заданной функции).

Роль гипотез (3)

- **Математическая гипотеза Вселенной - Макс Тегмарк,** шведско-американский космолог, (2007): «все мы живем в гигантском математическом объекте таком, который является более сложным, чем додекаэдр, и, вероятно, более сложном, чем объекты с такими устрашающими названиями, как многообразие Калаби-Яу, тензорные расслоения и пространства Гильберта, появляющиеся сегодня в самых передовых теориях. Все в нашем мире является чисто математическим, включая вас самих».

Успешные математики- экспериментаторы

- **Пьер Ферма, Леонард Эйлер, Карл Гаусс, Бернхард Риман, Сриниваса Рамануджан**
- **Эдвард Лоренц – обнарузжил явление хаоса – аттрактор Лоренца в компьютерном эксперименте (1962)**
- Универсальное поведение при итерации одномерных отображений, наиболее известным из которых является логистическое отображение

$f: x \to \lambda x(1 - x)$, было открыто **Митчеллом Фейгенбаумом** в 1975 году с помощью электронного калькулятора

- Многие аспекты фракталов были найдены **Бенуа Мандельбротом** в 1970-х годах с использованием компьютерной графики. Понятия «фрактал» и «хаос» возникли на основании визуализации без предшествующего теоретического обоснования.
- Методы экспериментальной математики при изучении простых математических систем, таких как клеточные автоматы, простые программы, бесконечные последовательности и др., показывающих сложное поведение, применялись в книге «Новый вид науки» **Стивена Вольфрама.**

Системы компьютерной алгебры (1)

Невозможно избавиться от чувства, что математические формулы живут собственной жизнью и обладают собственным разумом, что они умнее нас, умнее даже тех, кто их открыл, что мы получаем из этих формул больше, чем в них было изначально заложено.

Генрих Герц

Компьютерная алгебра — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы.

Часто говорят, что к компьютерной алгебре относятся вопросы слишком алгебраические, чтобы содержаться в учебниках по вычислительной математике, и слишком вычислительные, чтобы содержаться в учебниках по алгебре.

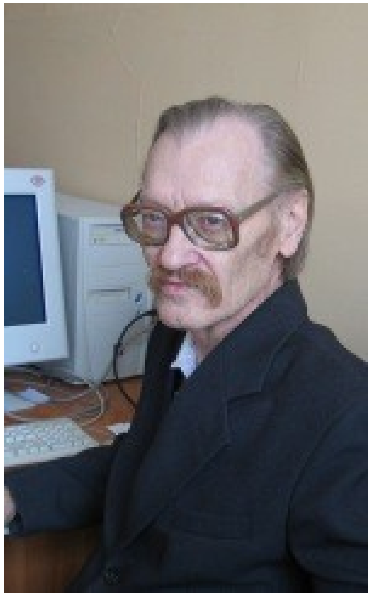
При этом ответ на вопрос о том, относится ли конкретная задача к компьютерной алгебре, часто зависит от склонностей специалиста.

Термин "компьютерная алгебра" возник как синоним терминов "символьные вычисления" , "аналитические вычисления", "аналитические преобразования" и т. д. Даже в настоящее время этот термин на французском языке дословно означает "формальные вычисления ".

Системы компьютерной алгебры (6)

Системы компьютерной алгебры в СССР.

Автоаналитик (Сибиряков Г. В., Арайс Е. А., Шутенков А. В., Гельфман Б. Ш., Зюзьков В. М.)

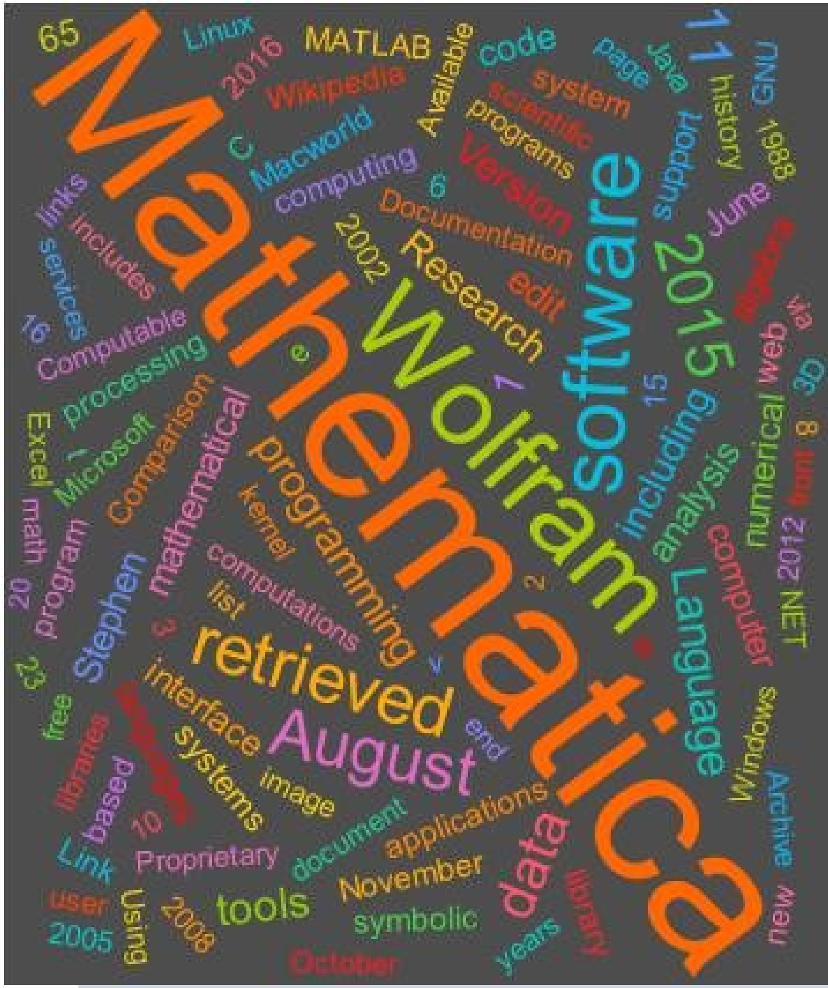


Mathematica

Устройство нашего мира непостижимо
без знания Mathematica.

Приписывается Роджеру Бэкону

Wolfram Language



Стивен Вольфрам

1988 – 2019 - …

Mathematica

www.wolfram.com

Mathematica – система компьютерной алгебры общего назначения, используется во многих научных, инженерных, математических и вычислительных областях.

Система была задумана Стивеном Вольфрамом (физик, математик и программист) и в дальнейшем разработана в компании Wolfram Research (Шампейн, штат Иллинойс, США). Начало разработки – 1986 г.; первая версия – 1988 г.; последняя версия 13.3.0 – март 2018 г.

Только человек, по роду своей деятельности имеющий дело с математическими расчётами, глубоко понимающий их специфику и потребности, мог создать подобный программный продукт.

Язык Wolfram и Mathematica (1)

- В математическом аппарате, реализованном в Mathematica и Wolfram Language, сегодня сделан акцент на «практическую», вычислительную математику. На данный момент она покрывает практически всю математику, существовавшую в 19 веке и ранее. Но компания Wolfram Research планирует использовать все виды новых встроенных функций и стандартизованных объектов данных для того, чтобы реализовать конструкции, необходимые для представления современной чистой математики. Разумеется, создание системы, позволяющей работать с чистой математикой, которая имела бы широкие возможности, была бы удобной и понятной, потребует многих лет тщательной разработки

Язык Wolfram и Mathematica (2)

- То, что делает современную экспериментальную математику отличной (как деятельность) от классической концепции и практики математики, заключается в том, что экспериментальный процесс рассматривается не только как предшественник доказательства.
- Скорее, экспериментирование рассматривается как значительная часть математики в своем собственном праве, которая будет опубликована, рассмотрена другими и (особенно важно), способствующей нашим общим математическим знаниям.
- В частности, это дает эпистемологический статус утверждениям, которые, несмотря на значительный объем экспериментальных результатов, до сих пор не были формально доказаны, а в некоторых случаях никогда не могут быть доказаны.
- В качестве примера. На настоящее время проверено, что более 10^{13} первых нетривиальных нулей дзета-функции Римана удовлетворяют гипотезе Римана. В предположении истинности гипотезы Римана написано около 10 тысяч математических работ.

Эйлер и Гаусс

- **Метод математического исследования и изложение и опубликование его результатов – это разные вещи.**
- ***Крылов А. Н. Мои воспоминания:*** «**Гаусс** прежде чем опубликовать какой бы то ни было труд, подвергал свое изложение самой тщательной обработке, прилагая крайнюю заботливость о краткости изложения, изяществе методов и языка, **не оставляя** при этом следов той черновой работы, которой он до этих методов достиг. Он говаривал, что когда здание построено, то не оставляют тех лесов, которые для постройки служили; поэтому **он не только не торопился с опубликованием своих работ, но оставлял их вылеживаться не то что годами, а десятками лет, часто к этой работе по временам возвращаясь, чтобы довести её до совершенства.**
- **Эйлер** поступал как раз обратно Гауссу. Он не только не разбирал лесов вокруг своего здания, но иногда даже как бы загромождал его ими. Зато **у него видны все подробности самого способа его работы**, что у Гаусса так тщательно скрыто. За отделкой Эйлер не гнался, работал сразу вчистую и публиковал в том виде, как работа получилась; но он далеко опередил печатные средства Академии, так что сам сказал, что академическим изданиям хватит его работ на 40 лет после его смерти; но здесь он ошибся – их хватило больше чем на 80 лет.»

Экспериментальная методология (1)

Современной экспериментальной математике более свойственно изложение результатов, **следуя Эйлеру.** Возможно, потому, что синтаксис языков программирования современных систем символьных вычислений очень близок к математической нотации.

Борвейн и Бейли под экспериментальной математикой подразумевают методологию математических исследований с компьютером для следующих видов познания:

1. Возникновение инсайта (интуитивного прозрения).
2. Обнаружение новых образцов и отношений.
3. Использование графической визуализации для обнаружения математических фактов.
4. Тестирование и особенно фальсификация догадок.
5. Изучение возможного результата, чтобы увидеть, стоит ли для него проводить формальное доказательство.
6. Предложение подходов для формального доказательства.
7. Замена длинных «ручных» выводов на компьютерные выводы.
8. Подтверждение аналитически полученных результатов.

Экспериментальная методология (2)

Типичный сценарий

- Изучение математической проблемы для определения аспектов, которые необходимо лучше понять.
- Использование компьютера для изучения этих аспектов, путем разработки конкретных примеров, создания графиков и т. д.
- Отмечая шаблоны или другие явления, очевидные в компьютерных результатах, которые относятся к исследуемой проблеме.
- Использование компьютерных средств для определения или «объяснения» этих шаблонов.
- Формулирование цепочки достоверных догадок, которые, если это так, разрешат изучаемый вопрос.
- Решение о том, указывает ли потенциальный результат в желаемом направлении и стоит ли полноценная попытка формального доказательства.
- Выполнение дополнительных компьютерных экспериментов для получения большей уверенности в ключевых гипотезах.
- Подтверждение этих гипотез строгими доказательствами.
- Использование символического вычислительного программного обеспечения для двойной проверки аналитических выводов.

Экспериментальная методология (3)

Стивен Вольфрам:

- «Доказать многие из результатов Рамануджана оказалось сложной задачей. Отчасти потому, что создание своего рода контекста, необходимого для доказательства, требует наращивания гораздо более абстрактных и концептуально сложных структур.
- Рамануджан обладал замечательными навыками. **Но мне кажется, что для того, чтобы пойти по его стопам, нужно быть смелым: не оставаться в комфорте хорошо зарекомендовавших себя математических теорий, а вместо этого выходить в более широкую математическую вселенную и начинать экспериментировать.**
- Для того, чтобы поместить многие открытия Рамануджана в более широкий и более абстрактный контекст, понадобился почти век. Рамануджан вдохновляет нас сделать большой шаг вперед – даже до того, как был понят более широкий контекст.
- И я надеюсь, что гораздо больше людей воспользуется теми инструментами, которые мы имеем сегодня, чтобы последовать примеру Рамануджана и сделать великие открытия в экспериментальной математике».

Компьютерные доказательства

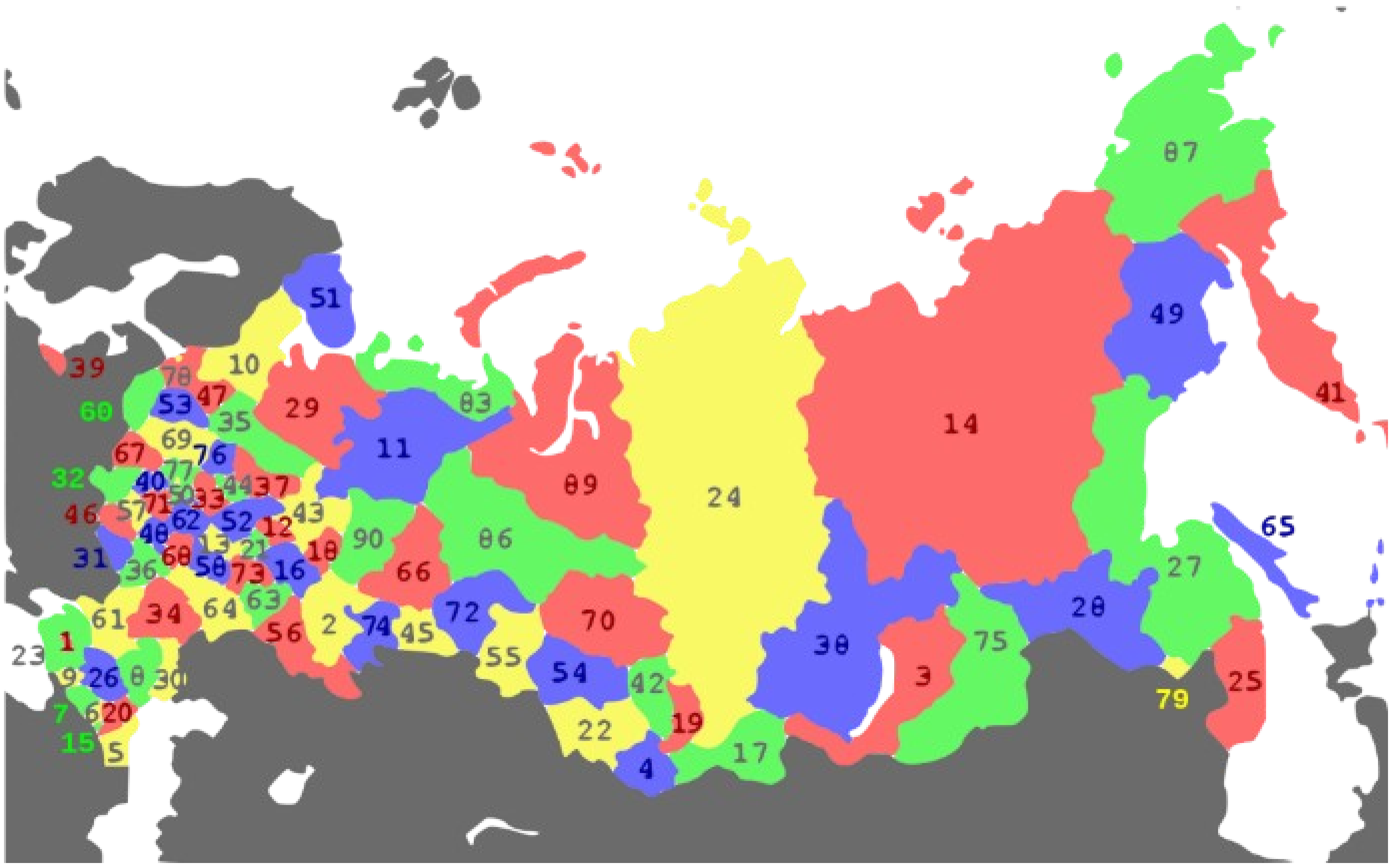
Лучший способ в чём-то разобраться до конца – это попробовать научить этому компьютер.

Дональд Кнут

- Компьютер играет важную роль в экспериментальной математике. Можно ли компьютер использовать более существенным образом, **поручить ему весь процесс доказательства математического результата**?
- Аксиоматический метод открывает для этого некоторые возможности. Формальное доказательство в конечном счете есть последовательность формул, получаемых из аксиом по чисто синтаксическим правилам. Поэтому в принципе для этого можно использовать компьютер.
- Но большинство полезных математических теорий являются неразрешимыми, т.е. для таких теорий не существует алгоритма, который нашел бы доказательство для теоремы.
- Что компьютер может – это постепенно в результате процесса вычисления порождать всё новые утверждения, выводимые в данной формальной системе, и этот процесс потенциально никогда не заканчивается. Так как мы не можем заранее знать, встретится или нет в этом перечислении интересующий нас результат, мы не можем рассчитывать и на построение его формального доказательства за конечное время.

Теорема о четырех красках (1)

Каждую карту на плоскости можно раскрасить правильным образом в четыре цвета. «Правильным образом» – это означает, что разные страны на этой карте, если они имеют общий участок границы, должны быть покрашены в разные цвета.



Теорема о четырех красках (2)

- Впервые эту гипотезу высказал математик-любитель по фамилии Гутри в 1852 г. Первые доказательства были предложены Кемпе в 1879 г. и Тэйт в 1880 г. Через 10 лет были найдены ошибки в обоих доказательствах.
- Эта известная математическая гипотеза оставалась недоказанной в течение более ста лет. Первое доказательство этой гипотезы было получено с помощью компьютеров американскими математиками Аппелем и Хакеном в 1976 г.
- Francis Guthrie (1831–1899) – математик и ботаник из Южно-Африканского Союза.
- Alfred Bray Kempe (1849–1922) – английский математик.
- Peter Guthrie Tait (1831–1901) – шотландский ученый в области математической физики.
- Кеннет Аппель (1932–2013) – американский математик.
- Вольфганг Хакен (р. в 1928 г.) – немецкий и американский математик.

Теорема о четырех красках (3)

- Аппель и Хакен свели доказательство этого результата к перебору более 1476 различных графов и проверки для них некоторого условия на компьютере.
- Само сведение к более чем тысяче случаев было далеко не тривиальным и в общем занимало 400 страниц, т.е. это был очень сложный математический результат, сопровождаемый еще более сложным компьютерным перебором, потребовавшим 1000 часов машинного времени.

Теорема о четырех красках (4)

- Как математическое сообщество отнеслось к такому доказательству?
- Согласно традиционным представлениям, прочно утвердившимся в XX веке, смысл опубликованного доказательства некоторой задачи, заключается в том, чтобы каждый математик мог прочесть доказательство, оценить его обоснованность, если нужно – проверить доказательство, высказать свои сомнения и возражения, если они у него есть.
- Только после того как опубликованное доказательство прошло подобное испытание среди математического сообщества, оно считается окончательно признанным.
- Не все математики признали теорему о четырех красках доказанной, как раз из-за использования компьютера.

Теорема о четырех красках (5)

- Возражения были следующего рода.
- **Как найти ошибку в доказательстве**, проведенном компьютером? **Как можно понять такое доказательство**, оценить его смысл и те связи, которые оно выявляет между различными сторонами исследуемой математической модели? Разобраться в деталях чужой сложной программы практически невозможно. Компьютеру придется просто доверять.
- Во-первых, компьютер мог дать сбой при вычислениях. Даже если результат проверен несколько раз, это лишь повышает вероятность правильности доказательства, **но не сделает его абсолютно надежным.**
- Во-вторых, в процессоре и вспомогательных программах (компиляторе, библиотеках и т. п.) **могут содержаться (и даже наверняка содержатся) ошибки**, и невозможно полностью исключить их влияние на правильность доказательства.

Теорема о четырех красках (6)

- И, наконец, самое главное: **программа, которая была написана для поиска или проверки доказательства, тоже может содержать ошибки**. Строго математически убедиться в том, что она в полной мере соответствует спецификации, настолько же сложно, как и проверить вручную выполненное с ее помощью доказательство (а возможно, и сложнее).
- И проблемы с этим доказательством действительно начались, но они оказались не в компьютерной части, а в человеческой. В доказательстве были найдены недочеты. В начале 1980-х гг. **Ульрих Шмидт** (Рейнско-Вестфальский технический университет Ахена) исследовал доказательство Аппеля и Хакена и обнаружил **пропуски в математической части доказательства**.

Теорема о четырех красках (7)

- В 1989 г. Аппель и Хакен напечатали **дополненное и исправленное доказательство теоремы**. Все обнаруженные Шмидтом пропуски вариантов были устранены, были исправлены и прочие ошибки, найденные другими математики. К доказательству был приложен полный текст программы.
- Вслед за этим известные специалисты по теории графов **Робертсон, Сандерс, Сеймур и Томас**, упростили доказательство Аппеля и Хакена и свели эту задачу к перебору 633 случаев, причем ими был найден более эффективный по времени алгоритм проверки условия.
- Тем не менее без помощи компьютера добиться решения этой проблемы не удавалось.

Теорема о четырех красках (8)

- В 1989 г. Аппель и Хакен напечатали **дополненное и исправленное доказательство теоремы**. Все обнаруженные Шмидтом пропуски вариантов были устранены, были исправлены и прочие ошибки, найденные другими математики. К доказательству был приложен полный текст программы.
- Вслед за этим известные специалисты по теории графов **Робертсон, Сандерс, Сеймур и Томас**, упростили доказательство Аппеля и Хакена и свели эту задачу к перебору 633 случаев, причем ими был найден более эффективный по времени алгоритм проверки условия.
- Тем не менее без помощи компьютера добиться решения этой проблемы не удавалось.

Формальные компьютерные доказательства (1)

- Некоторые рутинные части повседневной работы математиков очень хотелось бы отдать компьютеру. Но вот то, как это сделать, представляет собой значительную техническую проблему, которая связана не только с развитием математики и исследованиями логических теорий, но также и с развитием определенных компьютерных технологий.
- Приблизительно лет пятнадцать-двадцать назад развитие компьютерных технологий достигло такого уровня, когда стало возможно всерьез надеяться на создание систем, которые действительно могли бы помочь работе математика при построении и проверке математических доказательств, то есть фактически взять на себя часть его интеллектуальной работы.

Формальные компьютерные доказательства (2)

- На данный момент эта область очень быстро развивается и существует больше десятка различных систем, предназначенных для автоматического и полуавтоматического, то есть интерактивного, доказательства теорем. Для этих систем появилось специфическое название **theorem prover (система поиска вывода, «прувер»)**.
- Пруверы делятся на два класса:

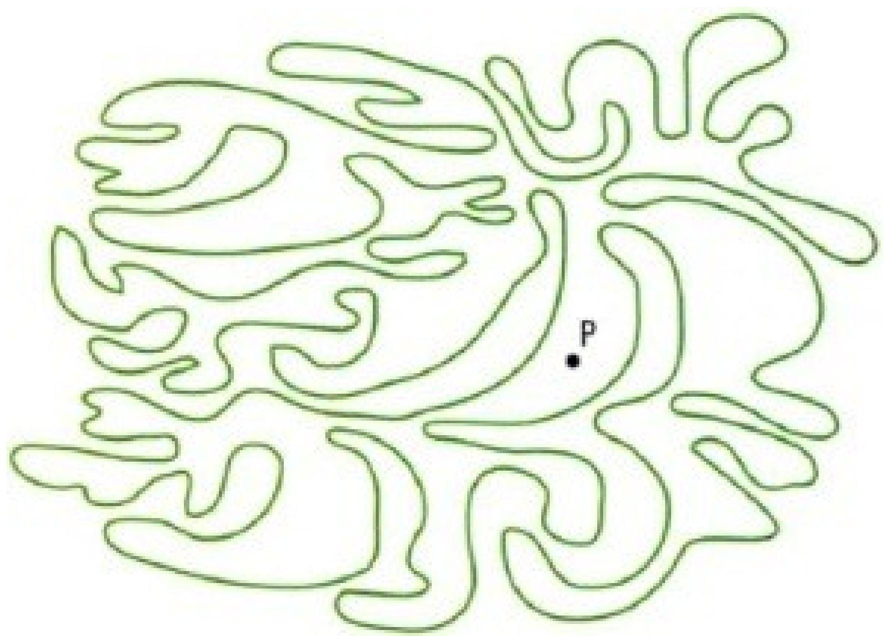
автоматические (automated theorem prover), которые ищут доказательства независимо от человека, и

интерактивные (proof-assistant = interactive theorem prover), которые взаимодействуют с человеком; он помогает компьютеру находить эти доказательства.

- Интерактивные системы наиболее перспективны для формализации реальных математических доказательств. **На основе этих систем уже были получены полностью формализованные доказательства целого ряда знаменитых математических результатов.**

Формальные компьютерные доказательства (3)

- **Теорема Жордана о кривой**: если J – простая замкнутая кривая в R^2, то R^2/J имеет две компоненты («внутренняя» и «внешняя») с J в качестве общей границы.
- Камиль Жордан высказал в 1882 г., О. Веблен доказал в 1905 г.
- В 2005 г. были независимо созданы два формальных доказательства этой теоремы с помощью пруверов HOL Light и Mizar.



Формальные компьютерные доказательства (4)

- **Теорема Гёделя о неполноте.** Формализованные доказательства этой теоремы были созданы в 1986 г. с помощью прувера Nqthm и в 2003 г. с помощью прувера Coq.
- **Теорема о распределении простых чисел**. Были формализованы два известных доказательства этой теоремы: в 2005 г. с помощью прувера Isabelle и в 2009 г. с помощью прувера HOL Light.

- В предыдущих примерах были получены компьютерные доказательства теорем, для которых уже были известны неформальные доказательства. Но компьютеры уже применяются и там, где без них не удается провести доказательства.

Теорема о четырех красках (9)

- В 2004 г. группа французских ученых под руководством Жоржа Гонтье полностью формализовала с помощью системы интерактивного поиска вывода Coq компьютерную часть доказательства Аппеля и Хакена на основе доказательства Робертсона и его соавторов.
- Работа включает как верификацию содержательного сведения, так и компьютерного перебора.
- Фактически была написана верифицированная в Coq программа перебора (и не нужно было вводить 633 случая от руки).

Надежность человеческого доказательства (1)

- Прежде чем обсудить надежность компьютерного доказательства, остановимся на надежности человеческого доказательства. Современная математика переживает **кризис переусложненности**: доказательства стали настолько длинными и сложными, что ни один ученый не взял бы на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность.
- **Например, доказательство двух гипотез Бернсайда из теории конечных групп занимает около пятисот страниц каждое.**
- Понятно, что такой длины сложный текст, конечно, может содержать ошибки.

Надежность человеческого доказательства (2)

- Человек может прочитать чужое доказательство и проверить, правильное оно или нет.
- Но если вы читаете чужое достаточно длинное доказательство и в нем есть ошибка, то **есть все шансы, что вы ее не заметите**. Почему?
- В первую очередь потому, что раз сам автор доказательства сделал эту ошибку – значит, она **психологически обоснована**.
- То есть он не просто так ее сделал, по случайности – это в принципе такое место, где обычный человек может сделать такую ошибку. Значит, и вы можете сделать ту же самую ошибку, читая это место и соответственно ее не заметив.
- И вот с этой проблемой – **найти ошибку в записанном людьми математическом тексте** – становится все труднее справиться, а иногда и вообще невозможно – это **серьезная проблема современной математики.**

Надежность компьютерного доказательства (1)

- Лев Беклемишев (р. 1967 – российский математик, доктор физико-математических наук. Работы в области математической логики) **считает, что достаточно надежны**. Приведем его аргументы.

1. Степень надежности зависит от прувера, его интерфейса и внутренней архитектуры. Абсолютной надежности (по целому ряду не зависящих друг от друга причин) не гарантирует ни один прувер. Несмотря на это, в целом компьютерные доказательства намного надёжнее всего остального.

Надежность компьютерного доказательства (2)

2. Идеальное техническое решение основывается на принципе де Брейна, который состоит в следующем.

- В основе прувера лежит **логическое ядро** – формальная аксиоматическая система, в которой записываются логические выводы. Логическое ядро **должно быть обозримым** – достаточно малым и простым. Например, аксиоматика Пеано и Цермело – Френкеля удовлетворяют этому условию.
- **Прувер** – который в принципе может быть сколь угодно сложной системой – в результате работы конструирует явный формальный вывод в языке своего ядра.
- **Верификатор** (независимо от прувера) проверяет корректность данного вывода на соответствие правилам ядра.
- Простота ядра гарантирует простоту верификатора. Более того, каждый желающий может сам написать свой собственный верификатор и убедиться в корректности каждого конкретного формального доказательства.

Теорема о четырех красках (10)

Для формального доказательства теоремы о четырех красках

Ж. Гонтье с коллегами **верифицировали как содержательную часть доказательства, сведение к перебору, так и формально доказали корректность алгоритма той программы, которая осуществляла перебор.**

В этом было принципиальное отличие их работы от предыдущих доказательств этой теоремы: **компьютерное вычисление было снабжено компьютерным же доказательством его корректности.** Конечно, это был успех, потому что **формальные верифицированные математические доказательства имеют гораздо большую надежность, чем любое сколько-нибудь объемное доказательство, полученное человеком.**

Таким образом, теорему о четырех красках, при всей ее громоздкости, можно считать на данный момент одним из **наиболее тщательно проверенных и надежно установленных математических результатов .**